Università degli Studi di Padova

Laurea Triennale in Matematica
Fisica Matematica
Secondo compitino 7 giugno 2016

1 Esercizio

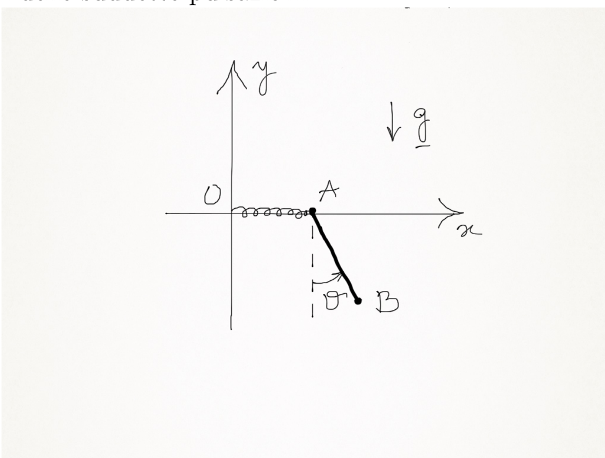
Si consideri il sistema di riferimento $Oxyz$ associato ad uno spazio inerziale, y verticale ascendente: $\underline{g} = -g\hat{y}$. Sull'asse x scorre senza attrito una particella A di massa m. Un'asta priva di massa AB, $|AB| = \ell$, è incernierata in A, è vincolata nel piano Oxy, e l'estremità B è composta da una particella di massa M. Quali parametri Lagrangiani si considerino (i) l'ascissa x di A e (ii) l'angolo ϑ, orientato positivamente anti-orario nel semi-spazio $z > 0$, dal semi-asse negativo delle y alla semiretta per AB. Tra l'origine O e A è tesa una molla di costante elastica $h > 0$.

Scrivere in dettaglio la matrice cinetica $a(...)$.

Impostare il calcolo delle pulsazioni di piccola oscillazione attorno ad un equilibrio stabile. Realizzare i conti nel seguente modo: una volta individuato l'equilibrio stabile, scrivere in dettaglio la condizione $0 = \det(.....)$, e, *solo a questo punto*, inserire i seguenti valori:

$$h = 2, \quad g = 1, \quad m = M = \frac{1}{2}, \quad \ell = 2,$$

e calcolare infine i valori numerici delle suddette pulsazioni.



2 Teoria

(i) Data $L = L(q, \dot{q}, t)$, $\quad q \in \mathbb{R}^N$, Principio variazionale di Hamilton, enunciato e dimostrazione.

(ii) A scelta, tra le due seguenti: 1) Teorema di Noether, enunciato e dimostrazione, oppure 2) Problema delle bolle di sapone (superficie minima) tra due cerchi, con lo stesso asse, di ugual raggio R e distanti tra loro 2ℓ.

(Facoltativo, ma *solo* dopo aver risposto ai quesiti precedenti: brachistocrona)

Soluzione all'esercizio 1

$$OA = \breve{OA}(x,\vartheta) = (x,0,0), \qquad OB = \breve{OB}(x,\vartheta) = (x+\ell\sin\vartheta, -\ell\cos\vartheta, 0),$$

$$\underline{V_A} = (\dot{x},0,0), \qquad \underline{V_B} = (\dot{x}+\ell\cos\vartheta\dot{\vartheta}, \ell\sin\vartheta\dot{\vartheta}, 0)$$

$$T(x,\vartheta,\dot{x},\dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2+\ell^2\dot{\vartheta}^2+2\ell\cos\vartheta\dot{x}\dot{\vartheta}\right)$$

$$a(x,\vartheta) = \begin{pmatrix} m+M & M\ell\cos\vartheta \\ M\ell\cos\vartheta & M\ell^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U}(x,\vartheta) = \frac{1}{2}hx^2 - Mg\ell cos\vartheta$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{,x} &= hx \\ \mathcal{U}_{,\vartheta} &= Mg\ell\sin\vartheta \end{aligned}$$

Equilibri: $(x^*,\vartheta^*) = (0,0),(0,\pi)$

$$\nabla^2\mathcal{U}(x,\vartheta) = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & Mg\ell\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

In $(0,0)$ l'Hessiana è def. pos.: stabile; è invece instabile $(0,\pi)$.

$$0 = \det\begin{pmatrix} h-\omega^2(m+M) & -\omega^2 M\ell \\ -\omega^2 M\ell & Mg\ell - -\omega^2 M\ell^2 \end{pmatrix}$$

$$0 = \det\begin{pmatrix} 2-\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & 1-2\omega^2 \end{pmatrix} = (2-\omega^2)(1-2\omega^2) - \omega^4 = \omega^4 - 5\omega^2 + 2$$

$$(\omega^2)_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{2}}$$